

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE FUNÇÕES DE BASE HIERÁRQUICAS PARA A VERSÃO- P DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Alberto Costa Nogueira Junior
Marco Lúcio Bittencourt

Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico, CEP 13083-970, Campinas, SP, Brasil

e-mail: rapadura@fem.unicamp.br

e-mail: mlb@fem.unicamp.br

Resumo. *Este trabalho apresenta um estudo comparativo entre funções de base hierárquicas associadas a elementos triangulares e tetraédricos. Discute-se, a partir da análise das propriedades de esparsidade e condicionamento locais, o desempenho de vários conjuntos de funções sugeridos na literatura (Carnevali, Morris, Tsuji e Taylor, 1993; Shephard, Dey e Flaherty, 1997; Sherwin e Karniadakis, 1995; Szabó e Babuska, 1991; Webb e Abouchakra, 1995; Abouchakra, 1996). Segundo os critérios de análise adotados, as funções propostas em (Webb e Abouchakra, 1995; Abouchakra, 1996; Sherwin e Karniadakis, 1995) demonstraram a melhor performance dentre as diferentes funções estudadas.*

Palavras-chave: *Funções hierárquicas, Versão- p , Método de Elementos Finitos*

1. INTRODUÇÃO

Na abordagem de problemas pelo Método de Elementos Finitos (MEF), o potencial ou campo vetorial desconhecido é aproximado por uma soma ponderada das funções de base (de forma ou de interpolação) associadas a cada elemento. A escolha dessas funções desempenha um papel fundamental na determinação da eficiência e flexibilidade do método.

Os elementos mais simples empregados no MEF utilizam funções polinomiais de baixa ordem definidas num espaço de coordenadas local. Elementos mais elaborados usam funções de base constituídas por polinômios de alta ordem. Alguns tipos de elementos de alta ordem, como os baseados na interpolação de Lagrange, não permitem que elementos de ordens diferentes sejam empregados numa mesma malha de elementos finitos. Nesse caso, viola-se a continuidade da função de aproximação nos contornos inter-elementos, a qual é condição indispensável para garantir a convergência do método. Por outro lado, o emprego de elementos de diferentes ordens ao longo de uma malha genérica revela-

se extremamente atraente uma vez que permite a utilização do conceito de *adaptação- p* (Babuska, Szabó e Katz, 1981). Dessa maneira, concebeu-se uma nova classe de elementos, denominados *hierárquicos* (Zienkiewicz e Taylor, 1988), contendo ambos os requisitos acima: funções de interpolação de alta ordem e continuidade. O conceito de hierarquia fundamenta-se na propriedade de que o conjunto de funções de base que gera o espaço de aproximação de uma dada ordem p contém integralmente o conjunto de funções de base do espaço de aproximação de ordem $p - 1$.

As funções de forma hierárquicas tipicamente empregadas na formulação p do MEF (Babuska et al., 1981) são comumente associadas a entidades topológicas dos elementos como vértices, arestas, faces e interiores (Szabó e Babuska, 1991). O tratamento clássico dessas funções envolve o uso de polinômios unidimensionais de Legendre ou Chebyshev. Nos casos multidimensionais de elementos quadrilaterais ou hexaédricos, utilizam-se expansões desses polinômios através de produtos tensoriais (Szabó e Babuska, 1991). A extensão dessas funções hierárquicas para domínios triangulares ou tetraédricos através do produto tensorial de polinômios unidimensionais não é imediata, necessitando de uma abordagem especial.

Em (Sherwin e Karniadakis, 1995), foi proposto um conjunto de funções hierárquicas para triângulos e tetraedros, baseado em coordenadas cartesianas, que preserva as propriedades do produto tensorial. As funções de base sugeridas nessa formulação empregam polinômios (hipergeométricos) de Jacobi e acomodam uma integração numérica exata usando apenas as regras de quadratura unidimensionais de Gauss-Legendre. A vantagem de não requerer procedimentos especiais de integração numérica (Dunavant, 1989) decorre da utilização de um conjunto de transformações de coordenadas, o qual permite definir domínios triangulares e tetraédricos a partir de sistemas de coordenadas retangulares e hexaédricos (Sherwin e Karniadakis, 1995).

Em (Webb e Abouchakra, 1995), descreve-se um elemento triangular hierárquico no qual também se utilizam os polinômios de Jacobi para gerar as funções de interpolação. Esse desenvolvimento mantém, no entanto, o esquema tradicional de definição do elemento de referência usado na formulação h do MEF ($[0, 1] 2 - simplex$), empregando portanto as regras de quadratura sugeridas em (Dunavant, 1989). Uma versão tridimensional desse elemento para o caso de malhas tetraédricas foi sugerida em (Abouchakra, 1996).

Um aspecto essencial na busca de alta performance para a versão- p do MEF diz respeito às propriedades de bom condicionamento e esparsidade das matrizes de rigidez e massa locais associadas ao elemento de referência (Babuska, Griebel e Pitkaranta, 1989; Carnevali et al., 1993; Edgar e Surana, 1996; Szabó e Peano, 1987). Em particular, o bom condicionamento dessas matrizes garante que os problemas de álgebra linear resultantes da discretização por elementos finitos (sistemas lineares e problemas de autovalor) podem ser resolvidos usando-se uma aritmética de precisão finita (Carnevali et al., 1993). Isto demonstra-se particularmente importante quando se empregam aproximações de alta ordem e/ou métodos iterativos na solução de sistemas lineares oriundos da formulação pelo MEF.

Os padrões de esparsidade e condicionamento das matrizes de rigidez e massa locais são determinados pela definição das funções de base e indiretamente influenciam os padrões de esparsidade e condicionamento das matrizes globais (Carnevali et al., 1993; Edgar e Surana, 1996; Zumbusch, 1995). Padrões apreciáveis de esparsidade são caracterizados por estruturas em banda e um pequeno número de elementos não-nulos. O bom condicionamento das matrizes locais é decisivo na utilização de métodos iterativos, pois resulta na redução do número de iterações. Da mesma maneira, a esparsidade dessas

matrizes resulta num menor custo por operação (Carnevali et al., 1993).

As funções hierárquicas clássicas para elementos quadrilaterais e hexaédricos propostas em (Szabó e Babuska, 1991) apresentam boas características quanto à esparsidade e o condicionamento (Edgar e Surana, 1996). Tais características decorrem diretamente das propriedades das integrais dos polinômios de Legendre e do caráter tensorial dessas funções. No entanto, para elementos triangulares e tetraédricos, as funções sugeridas em (Szabó e Babuska, 1991) não exibem propriedades tão boas, as quais tendem lamentavelmente a se degenerar com o aumento da ordem polinomial p (Carnevali et al., 1993).

Em (Carnevali et al., 1993), apresenta-se um conjunto de funções de base hierárquicas para triângulos, tetraedros e prismas enfatizando o processo de ortogonalização das derivadas dessas funções. Essa particularidade resulta na obtenção de matrizes de rigidez locais com maior grau de esparsidade e melhor condicionamento que as matrizes associadas às funções hierárquicas propostas em (Szabó e Babuska, 1991). Esse conjunto de funções de base demonstrou ainda conservar muitos termos nulos nas matrizes de rigidez locais mesmo quando se empregavam funções de mapeamento não-lineares.

Em (Shephard et al., 1997), propôs-se uma variante das funções hierárquicas anteriores. Introduziu-se o conceito de decomposição das funções de forma através do produto entre uma função definida sobre uma entidade topológica da malha e uma função que ajusta a primeira ao contorno do elemento. Nesse trabalho, foram apresentados ainda conjuntos de funções de forma hierárquicas em duas e três dimensões para diferentes tipos de elementos (lineares, triangulares, quadrilaterais, tetraédricos, hexaédricos, prismáticos e piramidais). As funções de forma para triângulos, quadrados, tetraedros e hexaedros são essencialmente versões decompostas de funções hierárquicas já apresentadas anteriormente (Carnevali et al., 1993; Szabó e Babuska, 1991).

O presente trabalho realiza um estudo comparativo entre funções de base hierárquicas associadas a triângulos e tetraedros. Discute-se, a partir da análise das propriedades de esparsidade e condicionamento locais, o desempenho de vários conjuntos de funções sugeridos na literatura (Carnevali et al., 1993; Shephard et al., 1997; Sherwin e Karniadakis, 1995; Szabó e Babuska, 1991; Webb e Abouchakra, 1995; Abouchakra, 1996). A sequência do trabalho está organizada da seguinte maneira: na seção 2, são apresentados os conjuntos de funções de forma hierárquicas bi e tridimensionais considerados. A seção 3 traz resultados numéricos comparando as diferentes funções hierárquicas associadas a triângulos e tetraedros. As conclusões a respeito das investigações realizadas são mostradas na seção 4.

2. FUNÇÕES DE BASE HIERÁRQUICAS

As funções hierárquicas associadas ao elemento triangular de Szabó & Babuska são definidas sobre o triângulo de referência equilátero $\hat{T} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \eta < \sqrt{3}(\xi + 1), -1 < \xi < 0 \text{ ou } 0 < \eta < \sqrt{3}(1 - \xi), 0 < \xi < 1\}$ (Szabó e Babuska, 1991) e construídas através da integração dos polinômios de Legendre. Essas funções são dadas em termos das coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$) do elemento padrão, as quais obedecem a relação $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.

Definim-se, para esse elemento triangular, 3 funções de vértice, $3(p - 1)$ funções de aresta para $p \geq 2$ e $(p - 1)(p - 2)/2$ funções de face para $p \geq 3$. As funções associadas aos vértices são dadas pelas próprias coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$). Essas funções possuem um comportamento linear, assumindo valor unitário no vértice i do elemento de referência e anulando-se nos lados opostos a esse mesmo vértice. As funções de aresta são

construídas de modo que em cada lado do triângulo as mesmas se encaixem exatamente nas funções correspondentes definidas para o elemento quadrilateral proposto em (Szabó e Babuska, 1991) e ainda se anulem ao longo dos outros dois lados do triângulo. As funções de face possuem um aspecto do tipo bolha e são construídas de forma que se anulem em cada um dos lados do triângulo de referência.

Com exceção da característica de emenda das funções de aresta do triângulo de Szabó & Babuska com as respectivas funções do elemento quadrilateral, todas as outras funções hierárquicas definidas adiante possuem os mesmos comportamentos descritos anteriormente. A quantidade de funções por elemento a cada nível de aproximação p também segue o mesmo padrão sugerido acima. Em geral, as diferenças aparecem na forma do elemento de referência utilizado e nos tipos de polinômios que compõem as funções de interpolação. A utilização de coordenadas de área é bastante comum, mas não obrigatória (Sherwin e Karniadakis, 1995).

As funções hierárquicas associadas ao elemento triangular proposto em (Carnevali et al., 1993) são definidas sobre o triângulo de referência retângulo $\hat{T} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \eta < 1 - \xi, 0 < \xi < 1\}$, denominado $[0, 1]$ 2-*simplex*. Essas funções, assim como no caso anterior, são dadas em termos das coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$) do elemento padrão. Além disso, emprega-se o procedimento de Gram-Schmidt para conferir características de ortogonalidade às derivadas das funções de forma que compõem esse elemento (Carnevali et al., 1993).

As funções hierárquicas sugeridas em (Webb e Abouchakra, 1995) são construídas com base nos polinômios (hipergeométricos) de Jacobi. Essas funções são definidas exatamente sobre o mesmo triângulo padrão usado por Carnevali et al. e também são descritas através das coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$).

O conjunto de funções hierárquicas proposto em (Sherwin e Karniadakis, 1995) é definido sobre o triângulo padrão $T^2 = \{(\phi, \psi) \mid -1 \leq \phi, \psi; \phi + \psi \leq 0\}$, mapeado a partir do domínio quadrilateral $R^2 = \{(\Phi, \Psi) \mid -1 \leq \Phi, \Psi \leq 1\}$. Essas funções são construídas com base nos polinômios de Jacobi e também podem ser escritas nas coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$).

A Tabela 1 apresenta, em termos das coordenadas de área L_i ($i = 1, 2, 3$), as expressões para as funções hierárquicas associadas aos diferentes tipos de elementos triangulares mencionados acima.

Szabó	vértice	$N_1^{(1)} = L_1, \quad N_1^{(2)} = L_2, \quad N_1^{(3)} = L_3$
	aresta ¹	$N_i^{(1)} = L_1 L_2 \varphi_i(L_2 - L_1)$
		$N_i^{(2)} = L_2 L_3 \varphi_i(L_3 - L_2)$ $N_i^{(3)} = L_3 L_1 \varphi_i(L_1 - L_3)$
face ²	$N_{(p-2)(p-3)/2+i}^{(0)} = L_1 L_2 L_3 P_{(p-3)+1-i}(L_2 - L_1) P_{i-1}(2L_3 - 1)$	

¹O termo $\varphi_i(\zeta)$ é definido através da seguinte expressão: $\frac{1}{4}(1-\zeta^2)\varphi_i(\zeta) = \phi_i(\zeta) = \sqrt{\frac{2i-1}{2}} \int_{-1}^{\zeta} P_{i-1}(t) dt$

² P_k é o polinômio de Legendre de ordem k .

Carnevali	vértice	$h_1^{(1)} = L_1, \quad h_2^{(1)} = L_2, \quad h_3^{(1)} = L_3$
	aresta ³	$h_1^{(p)} = -2L_1L_2E_{p-2}(L_1, L_2)$ $h_2^{(p)} = -2L_2L_3E_{p-2}(L_2, L_3)$ $h_3^{(p)} = -2L_3L_1E_{p-2}(L_3, L_1)$
	face ⁴	$h_{\alpha,\beta}^{(p)} = L_1L_2L_3F_{\alpha,\beta}(L_1, L_2)$
Webb	vértice	$N_1 = L_1, \quad N_2 = L_2, \quad N_3 = L_3$
	aresta ⁵	$N_{a+1} = L_1L_2P_{p-2}^{(2,2)}(L_2 - L_1)$ $N_{a+2} = L_2L_3P_{p-2}^{(2,2)}(L_3 - L_2)$ $N_{a+3} = L_3L_1P_{p-2}^{(2,2)}(L_1 - L_3)$
	face ⁶	$N_{a+4+i} = L_1L_2L_3(1 - L_3)^k P_i^{(2,2k+5)}(1 - 2L_3)P_k^{(2,2)}\left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3}\right)$
Sherwin	vértice	$g_{10}^{1-2\text{vert } A} = L_1, \quad g_{01}^{1-2\text{vert } B} = L_2, \quad g_{01}^{1-2\text{vert } C} = L_3$
	aresta	$g_{l0}^{1-2\text{lado } 1} = L_1L_2P_{l-2}^{1,1}\left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3}\right)(1 - L_3)^{l-2}$ $g_{1m}^{1-2\text{lado } 2} = L_2L_3P_{m-1}^{1,1}(2L_3 - 1)$ $g_{1m}^{1-2\text{lado } 3} = L_3L_1P_{m-1}^{1,1}(2L_3 - 1)$
	face ⁷	$g_{lm}^{1-2\text{interior}} = L_1L_2L_3P_{l-2}^{1,1}\left(\frac{L_2-L_1}{1-L_3}\right)(1 - L_3)^{l-2}P_{m-1}^{2l-1,1}(2L_3 - 1)$

Tabela 1: Expressões para as funções hierárquicas dos elementos triangulares.

As funções hierárquicas associadas a elementos tetraédricos são análogas àquelas definidas para os elementos triangulares. Para maiores detalhes a respeito das características dos elementos tetraédricos hierárquicos e da construção de suas respectivas funções de interpolação veja (Carnevali et al., 1993; Shephard et al., 1997; Sherwin e Karniadakis, 1995; Szabó e Babuska, 1991; Abouchakra, 1996; Nogueira Jr., 1999).

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

3.1. Condicionamento das matrizes de rigidez e massa locais

A seguir são apresentados resultados sobre o condicionamento das matrizes de rigidez e massa locais para os diferentes tipos de elementos triangulares e tetraédricos considerados anteriormente. Para o mesmo tipo de análise em elementos quadrilaterais e hexaédricos, veja (Babuska et al., 1989; Edgar e Surana, 1996). As matrizes de rigidez locais são obtidas a partir do operador de Laplace ($-\Delta u = f$) sobre o triângulo padrão. Calcula-se o número de condição das matrizes locais com base em dois procedimentos distintos utilizados em (Zumbusch, 1995) e (Webb e Abouchakra, 1995), respectivamente.

³O termo $E_{p-2}(L_i, L_j)$ é definido através da seguinte expressão, para $p \geq 2$: $E_{p-2}(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k \frac{1}{k+1} \binom{p-2}{k} \binom{p-1}{k} L_i^k L_j^{p-2-k}$

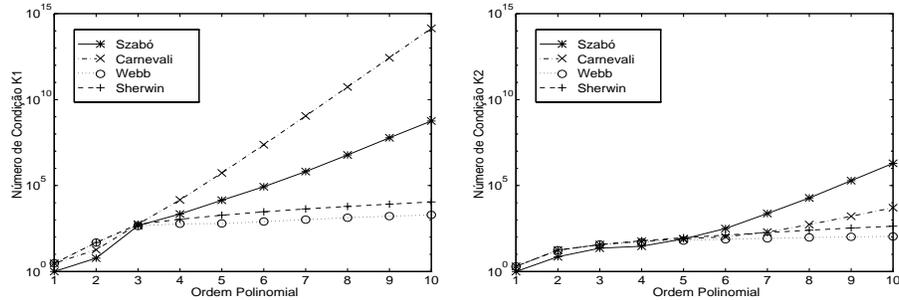
⁴O termo $F_{\alpha,\beta}(L_r, L_s)$ é definido através da seguinte expressão, para $\alpha, \beta = 0, \dots, p-3$; $\alpha + \beta = p-3$ e $p \geq 3$: $F_{\alpha,\beta}(L_r, L_s) = \sum_{i=0}^{\beta} \sum_{j=0}^{\alpha} (-\frac{1}{2})^{i+j} i! j! (i+j)! \binom{\alpha}{j} \binom{\alpha+1}{j} \binom{\beta}{i} \binom{\beta+1}{i} \times \frac{1}{\prod_{k=1}^{i+j} [k(\alpha+\beta+2) - k(k-1)/2]} (L_r)^{\alpha-j} (L_s)^{\beta-i}$

⁵O índice a , para $p = 2, 3, \dots, n$, é definido por $a = \frac{1}{2}p(p+1)$

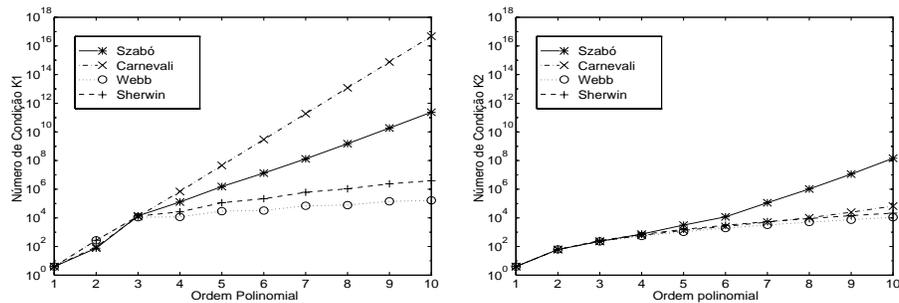
⁶O índice k , para $p \geq 3$ e $i = 0, 1, \dots, p-3$, é dado por $k = p-3-i$.

⁷O índice lm é definido de modo que ($2 \leq l; 1 \leq m \mid l < L; l+m < M$), com L e M indicando o número total de funções de base. $P_k^{\alpha,\beta}$ são polinômios de Jacobi de ordem k e pesos α e β .

No primeiro caso, computa-se o número de condição das matrizes de rigidez através da seguinte relação $\kappa_1 = \frac{\max \mu}{\min \mu \neq 0}$, sendo $\max \mu$ e $\min \mu$ o maior e o menor valores singulares diferentes de zero (ou mais próximos de zero) dessas matrizes, respectivamente. No caso das matrizes de massa, procede-se analogamente sem desconsiderar o valor singular mais próximo de zero. Esse modo de avaliação equivale a calcular o número de condição a partir da sua definição considerando-se a norma euclidiana (norma-2), i.e., $\kappa_1 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$, uma vez que as matrizes $[A]$ são reais, simétricas e positivas-definidas⁸.



(a) Matriz de Rigidez



(b) Matriz de Massa

Figura 1: Número de condição das matrizes de rigidez e massa locais vs. ordem polinomial p , considerando-se as definições de κ_1 e κ_2 (elementos triangulares).

No segundo método, calcula-se o número de condição considerando o mesmo procedimento anterior, efetuando-se dessa vez a mudança de escala nas matrizes locais

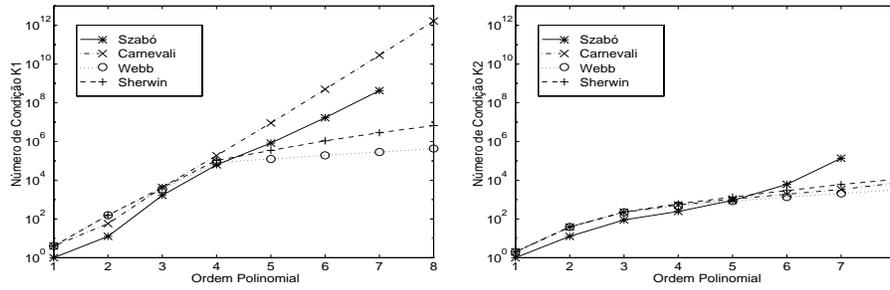
$$\tilde{A} = DAD,$$

sendo D uma matriz diagonal cujos elementos são fornecidos pela relação $D_{ii} = \frac{1}{\sqrt{A_{ii}}}$, com A_{ii} dado pelos elementos diagonais das matrizes de rigidez e massa originais. Nesse caso, o número de condição será dado pela relação $\kappa_2 = \|\tilde{A}\|_2 \|\tilde{A}^{-1}\|_2$. Esse procedimento é equivalente a normalizar as funções de base através da multiplicação destas por fatores constantes. A mudança de escala nas matrizes locais permite tomar como parâmetro um conjunto de funções de base ideal (conjunto ortogonal) cujo número de condição das matrizes locais seria 1 (Webb e Abouchakra, 1995).

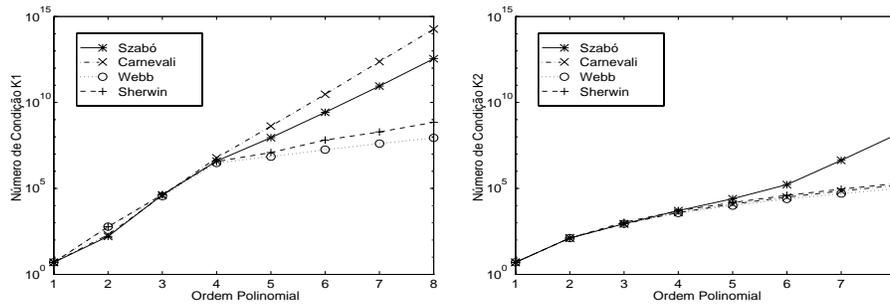
As Figuras 1 e 2 apresentam os números de condição obtidos a partir das matrizes de rigidez e massa locais em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas

⁸Nessa situação, os valores singulares μ e os auto-valores λ das matrizes locais são idênticos.

analisadas ($p = 1, \dots, 10$ para triângulos e $p = 1, \dots, 8$ para tetraedros). Consideram-se as duas metodologias de cálculo adotadas.



(a) Matriz de Rigidez



(b) Matriz de Massa

Figura 2: Número de condição das matrizes de rigidez e massa locais vs. ordem polinomial p , considerando-se as definições de κ_1 e κ_2 (elementos tetraédricos).

Observa-se a partir desses gráficos que, para ambos os métodos de cálculo do número de condição das matrizes de rigidez locais, o conjunto de funções propostas em (Webb e Abouchakra, 1995) forneceu os melhores resultados. As funções de base apresentadas em (Sherwin e Karniadakis, 1995; Webb e Abouchakra, 1995) demonstraram, em todos os casos, um comportamento de estabilização do número de condição com o aumento da ordem polinomial. Nota-se que o desempenho apresentado pelas funções de base fornecidas em (Carnevali et al., 1993) é fortemente dependente da normalização das mesmas. Confirmou-se ainda a acentuada tendência de degeneração do número de condição das funções propostas em (Szabó e Babuska, 1991) com o aumento da ordem polinomial. Os mesmos comentários feitos em relação ao condicionamento das matrizes de rigidez locais se aplicam ao caso das matrizes de massa locais.

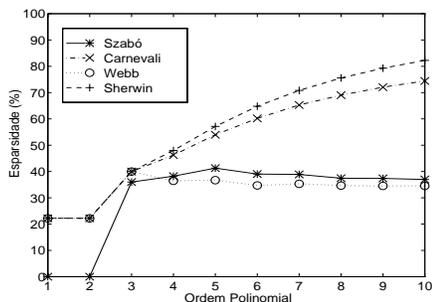
3.2. Esparsidade das matrizes de rigidez e massa locais

A seguir são apresentados resultados sobre o grau de esparsidade das matrizes de rigidez e massa locais para os diferentes tipos de elementos triangulares e tetraédricos considerados previamente⁹. Assim como na análise do condicionamento, as matrizes

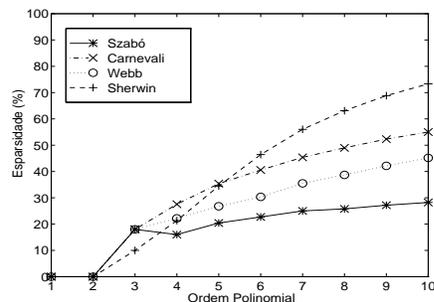
⁹Observa-se que as integrais nas matrizes de rigidez e massa locais foram obtidas de forma exata a partir do programa de manipulação simbólica MATHEMATICA 3.0. A não utilização de procedimentos numéricos de integração permite uma avaliação precisa da ortogonalidade entre as funções hierárquicas

de rigidez locais também são obtidas a partir do operador de Laplace sobre o triângulo padrão. O grau de esparsidade é computado como o inverso da densidade do elemento (Carnevali et al., 1993), i.e., a fração de elementos nulos presente nas matrizes de rigidez e massa locais.

Nas Figuras 3 e 4, a porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez e massa locais é mostrada em função da ordem polinomial p das funções hierárquicas analisadas ($p = 1, \dots, 10$ para triângulos e $p = 1, \dots, 8$ para tetraedros).

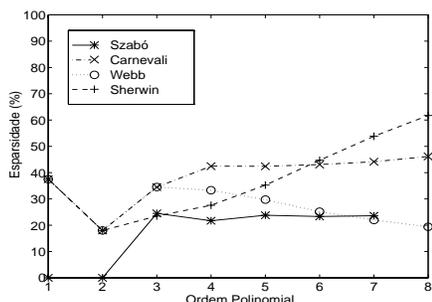


(a) Matriz de Rigidez

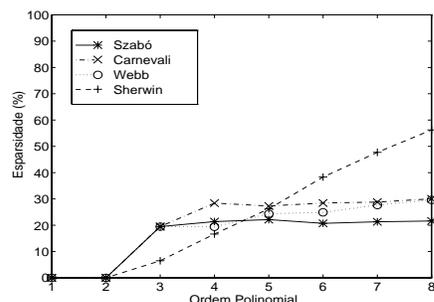


(b) Matriz de Massa

Figura 3: Porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez e massa locais vs. ordem polinomial p (elementos triangulares).



(a) Matriz de Rigidez



(b) Matriz de Massa

Figura 4: Porcentagem de elementos nulos das matrizes de rigidez e massa locais vs. ordem polinomial p (elementos tetraédricos).

Observa-se que os maiores níveis de esparsidade acontecem para o conjunto de funções de forma proposto em (Sherwin e Karniadakis, 1995), tanto para as matrizes de rigidez quanto para as de massa. Esse fato demonstra que os polinômios de Jacobi, tal como empregados nessa formulação, conferem uma acentuada ortogonalidade a essas funções de forma. Da mesma maneira, verifica-se que a propriedade de ortogonalidade entre essas funções é preservada entre suas derivadas.

analisadas e consequentemente da esparsidade das matrizes locais.

3.3. Esparsidade e condicionamento das matrizes locais para o caso de elementos distorcidos

Estudos sobre o efeito da distorção dos elementos considerados nos níveis de esparsidade e condicionamento das matrizes de rigidez locais foram conduzidos em (Nogueira Jr., 1999). Esse tipo de análise revelou, em geral, um crescimento dos números de condição das matrizes locais em relação ao caso não-distorcido. Da mesma forma, observou-se uma redução nos níveis de esparsidade das mesmas. Para as análise de condicionamento sob o efeito de distorção, as funções sugeridas em (Webb e Abouchakra, 1995; Sherwin e Karniadakis, 1995) demonstraram as melhores performances. No caso da esparsidade, as funções apresentadas em (Sherwin e Karniadakis, 1995) foram superiores.

4. CONCLUSÕES

Pode-se dizer que as funções hierárquicas associadas a triângulos e tetraedros sugeridas em (Webb e Abouchakra, 1995) apresentaram os melhores resultados para o conjunto de análises relativo ao condicionamento. Quanto ao item esparsidade, os melhores resultados foram alcançados pelas funções hierárquicas propostas em (Sherwin e Karniadakis, 1995). Ressalta-se ainda a vantagem no uso dessas últimas funções pelo fato de não necessitarem de procedimentos especiais de integração. Este trabalho bem como o desenvolvimento de novas funções hierárquicas para triângulos e tetraedros apresentadas em (Nogueira Jr., 1999), tiveram por objetivo selecionar o conjunto de funções de forma mais adequado para a utilização de métodos iterativos e multigrid algébricos na solução de sistemas lineares resultantes da aplicação das versões p e hp do MEF.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pela Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP – Proc. 98/03101-0).

REFERÊNCIAS

- Abouchakra, R. (1996), Hierarchical tetrahedral elements using orthogonal polynomials, *in* ‘1996 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE’96)’, Vol. 18, Calgary, pp. 525–528. part 2 (of 2).
- Babuska, I., Griebel, M. e Pitkaranta, J. (1989), ‘The problem of selecting the shape functions for p-type finite elements’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **28**, 1891–1908.
- Babuska, I., Szabó, B. A. e Katz, I. N. (1981), ‘The p-version of the finite element method’, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **18**, 515–545.
- Carnevali, P., Morris, R. B., Tsuji, Y. e Taylor, G. (1993), ‘New basis functions and computational procedures for p-version finite element analysis’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **36**, 3759–3779.
- Dunavant, D. A. (1989), ‘High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **28**, 1891–1908.

- Edgar, N. B. e Surana, K. S. (1996), ‘On the conditioning number and the selection criteria for p-version approximation functions’, *Computers and Structures* **60**(4), 521–530.
- Nogueira Jr., A. C. (1999), Relatório anual de atividades 1998 - FAPESP, Relatório técnico, Campinas.
- Shephard, M. S., Dey, S. e Flaherty, J. E. (1997), ‘A straightforward structure to construct shape functions for variable p-order meshes’, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering* **147**, 209–233.
- Sherwin, S. J. e Karniadakis, G. (1995), ‘A new triangular and tetrahedral basis for high-order (hp) finite element methods’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **38**, 3775–3802.
- Szabó, B. A. e Babuska, I. (1991), *Finite Element Analysis*, Wiley Interscience, New York.
- Szabó, B. A. e Peano, A. G. (1987), Hierarchic finite elements, in ‘Finite Element Handbook’, McGraw-Hill, New York, pp. 2227–2233.
- Webb, J. P. e Abouchakra, R. (1995), ‘Hierarchal triangular elements using orthogonal polynomials’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **21**, 1129–1148.
- Zienkiewicz, O. C. e Taylor, R. L. (1988), *The Finite Element Method*, Vol. 1, 4 edn, McGraw-Hill, London.
- Zumbusch, G. (1995), Simultaneous h-p adaption in multilevel finite elements, PhD thesis, Freien Universitat Berlin, Berlin.

A COMPARATIVE STUDY ON HIERARCHICAL BASIS FUNCTIONS FOR THE P-VERSION OF THE FINITE ELEMENT METHOD

Abstract. *This paper presents a comparative study on hierarchical basis functions for triangular and tetrahedral domains. The element condition number and sparsity are discussed for various sets of shape functions suggested in the literature (Carnevali et al., 1993; Shephard et al., 1997; Sherwin e Karniadakis, 1995; Szabó e Babuska, 1991; Webb e Abouchakra, 1995; Abouchakra, 1996). Based on the criteria adopted to the present analysis, the better performance is achieved by the functions proposed in (Webb e Abouchakra, 1995; Abouchakra, 1996; Sherwin e Karniadakis, 1995) .*

Key-words: *Hierarchical basis functions, p-version, Finite Element Method*